



Gara Nazionale  
Prova Sperimentale  
Senigallia  
giovedì 16 aprile 2026

## SOLUZIONE

### PENDOLI ACCOPPIATI

#### Quesito n. 1.1.

Note utili per le misure:

- (1) Il passo delle variazioni di  $\ell_z$  non deve essere inferiore a 2 cm in modo da avere variazioni apprezzabili nelle misure di intervallo di tempo;
- (2) Occorre verificare che la distanza  $d$  non venga modificata dalla variazione di tensione del filo di supporto. In caso contrario occorre ripristinare il valore assegnato per questa distanza.
- (3) Occorre in ogni caso non modificare la lunghezza  $L$  qualora si sia costretti a ripristinare il valore di  $d$ . Per far ciò occorre agire sul filo appropriato, trattenendo la fascetta metallica e l'altro filo durante l'operazione.
- (4) Poiché, specie per il modo 2, le differenze di periodo sono piccole, conviene diluire l'errore dell'operatore (nell'uso del cronometro) facendo oscillare i pendoli per un congruo numero di oscillazioni complete (questo accorgimento, che qui viene suggerito, necessiterebbe di una fase preliminare di misura da cui stabilire il numero di oscillazioni più idoneo da considerare). Una stima ragionevole del numero di oscillazioni si può fare ritenendo che l'operatore introduca un errore di circa  $\pm 0.15$  s nelle misure di intervallo di tempo. Se si vuole che l'incertezza sulla misura di periodo non superi 0.005 s occorre che far oscillare i pendoli per  $N = 0.15 \text{ s} / 0.005 \text{ s} = 30$  oscillazioni.
- (5) Quando si studia il secondo modo di oscillazione occorre fare attenzione affinché i nodi (punti dove sono situate le fascette) siano situati alla stessa altezza e lo spostamento dei dadi sia della stessa entità in direzioni opposte. In caso contrario il sistema presenta il fenomeno dei battimenti.

Per ricavare  $c$  occorre misurare il periodo delle oscillazioni al variare dell'unica grandezza che può essere modificata, ossia  $\ell_z$  (anche se si può intuire che il coefficiente  $c_1$  sia indipendente da  $\ell_z$  la stessa ipotesi non può essere avanzata per  $c_2$ ). I risultati delle misure vanno sostituiti nella seguente formula:

$$c = \frac{T^2 g}{4\pi^2 \ell_z} - \frac{L}{\ell_z}.$$

Esempio: misure e loro elaborazione ( $D = 75.0$  cm;  $L = 40.0$  cm;  $d = 15.0$  cm)

$\ell_z$ /m	$\Delta t_1$ /s (30)	$\Delta t_2$ /s (50)	$T_1$ /s	$T_2$ /s	$T_1^2$ /s <sup>2</sup>	$T_2^2$ /s <sup>2</sup>	$c_1$	$c_2$
0.102	42.55	64.89	1.418	1.298	2.012	1.684	0.979	0.182
0.122	43.53	65.31	1.451	1.306	2.105	1.706	1.010	0.196
0.141	44.15	65.55	1.472	1.315	2.166	1.719	0.980	0.192
0.161	44.93	65.72	1.498	1.318	2.243	1.728	0.977	0.182
0.185	45.85	66.28	1.528	1.327	2.336	1.757	0.975	0.198
0.211	46.86	66.64	1.562	1.335	2.440	1.776	0.978	0.196
0.234	47.79	66.92	1.593	1.344	2.538	1.791	0.985	0.193
media							0.984	0.191
incertezza							0.012	0.007

Si ottiene  $c_1 = 0.984 \pm 0.012$  e  $c_2 = 0.191 \pm 0.007$ .

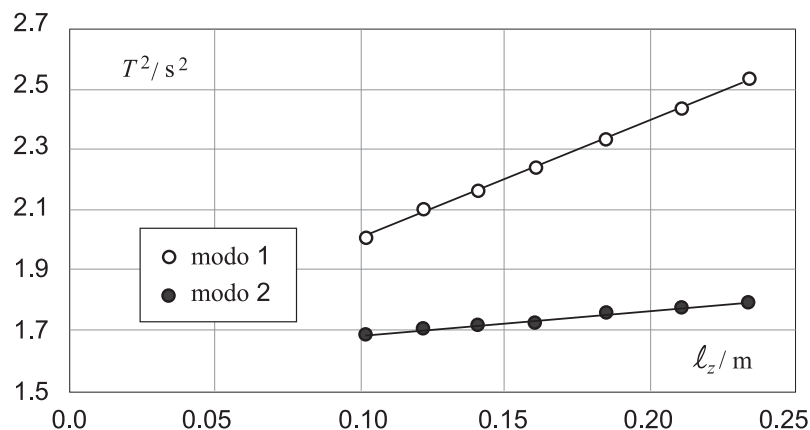
È possibile dimostrare che la lunghezza efficace teorica dei pendoli nel modo normale 1 è uguale a  $L + \ell_z$ . L'osservazione diretta dei pendoli durante le oscillazioni, in effetti, sembrerebbe suggerire tale considerazione. Di conseguenza, ci si sarebbe aspettati il valore  $c_1 = 1^{(1)}$ . Analogamente, è possibile dimostrare che la lunghezza efficace dei pendoli nel modo normale 2 è uguale a  $L + d\ell_z/D$ . Dunque, in questo esperimento, si sarebbe dovuto ottenere  $c_2 = 0.200$ .

<sup>(1)</sup> Vedi l'articolo di Moloney [2]. Le ragioni del perché dalle misure deve risultare  $c_1 < 1$  sono discusse in Appendice.

In alternativa, poiché è

$$T^2 = \frac{4\pi^2 L}{g} + \frac{4\pi^2 c}{g} \ell_z,$$

si riportano in grafico gli andamenti di  $T_1^2$  e  $T_2^2$  in funzione di  $\ell_z$ .



Constatato l'accordo delle misure con l'ipotesi di relazione lineare, dai coefficienti angolari  $p$  si ottiene  $c = pg/(4\pi^2)$ , per cui  $c_1 = 0.972$  e  $c_2 = 0.201$ .

Usando le funzioni statistiche della calcolatrice si ottiene  $p_1 = 3.916$ , da cui  $c_1 = 0.973$ . Inoltre,  $p_2 = 0.808$ , da cui  $c_2 = 0.201^{(2)}$ .

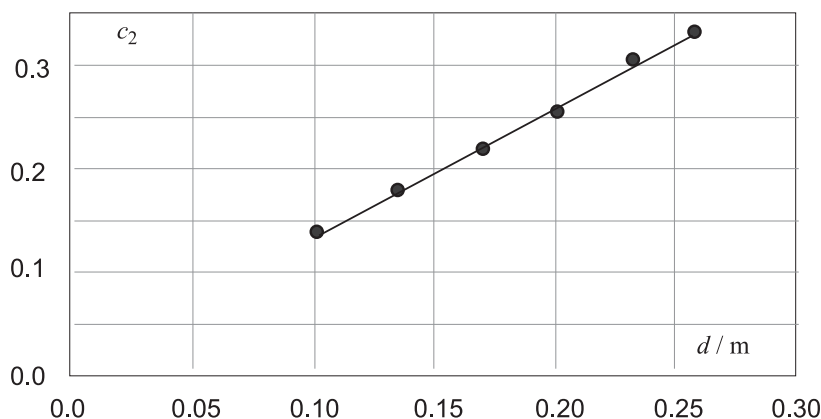
### Quesito n. 1.2.

Si procede come nel caso precedente, avendo cura di variare la distanza  $d$  senza tuttavia modificare né la lunghezza  $L$  dei pendoli, né la lunghezza  $\ell_z$ . Le misure riportate di seguito si riferiscono a una situazione sperimentale in cui  $L = 40.0$  cm;  $\ell_z = 13.0$  cm. Si misura  $\Delta t_2$  impiegando almeno 50 oscillazioni e si usa ancora la formula

$$c = \frac{T^2 g}{4\pi^2 \ell_z} - \frac{L}{\ell_z} \quad \text{per dedurre } c_2.$$

$d/\text{m}$	$\Delta t_2/\text{s}$ (50)	$T_2/\text{s}$	$T_2^2/\text{s}^2$	$c_2$
0.259	66.75	1.335	1.782	0.330
0.233	66.49	1.330	1.768	0.303
0.202	65.99	1.320	1.742	0.253
0.171	65.63	1.313	1.723	0.216
0.136	65.25	1.305	1.703	0.178
0.102	64.83	1.297	1.681	0.137

Per dedurre la funzione  $c_2 = f(d)$  è necessario partire dalla costruzione di un grafico che mostri come i punti sperimentali si distribuiscono nel piano  $(c_2; d)$ . Il seguente grafico è costruito con i dati riportati in tabella. La distribuzione dei punti rende ragionevole concludere che almeno nell'intervallo di valori  $d$  esplorato la relazione sia di tipo lineare. Il fit lineare conferma tale ipotesi fornendo  $c_2 = 1.242 d + 0.008$  con  $r = 0.9983$ .



<sup>(2)</sup> Con il calcolo della media aritmetica si calcola la costante  $c$  singolarmente per ogni coppia  $(\ell_z; T^2)$ , assumendo implicitamente che i punti passino per una determinata intercetta (non necessariamente zero) e trattando ogni risultato come un'osservazione indipendente. Questo metodo è sensibile a un errore casuale grande in una singola misura (p.e.  $T^2$ ), che può distorcere il valore medio finale.

Con la regressione lineare si considerano simultaneamente tutte le coppie per trovare la singola retta  $T^2 = p \ell_z + q$  che meglio si adatta all'intera serie di dati. L'algoritmo dei Minimi Quadrati distribuisce l'errore su tutti i punti, minimizzando l'errore complessivo rispetto al modello lineare teorico e fornendo quindi la stima migliore del parametro  $c$ .

Teoricamente si può avanzare l'ipotesi che l'intercetta debba essere uguale a 0. Infatti, la condizione  $d = 0$  implica che i pendoli oscillino in controfase appesi al medesimo punto. Si tratta di una condizione limite, puramente teorica dal momento che i dati hanno dimensione finita. In tale condizione, infatti, vengono meno gli spostamenti laterali dei nodi, materializzati dalle fascette, che sono invece presenti quando  $d > 0$ . Venendo meno tali spostamenti, i fili obliqui che vanno dai nodi al listello non partecipano più alle oscillazioni dei pendoli e il periodo dipenderà solo dalla lunghezza  $L$ . Poiché  $T_2 = 2\pi\sqrt{(L + c_2\ell_z)/g}$  si deve concludere che la condizione  $d = 0$  deve porgere l'altra  $c_2 = 0$ .

Ma per supportare questa conclusione andrebbe stimata l'incertezza da associare all'ordinata all'origine.

### Quesito n. 1.3.

I risultati ottenuti rispondendo al Q.1.2 devono far concludere che la differenza  $\omega_2^2 - \omega_1^2$  cambia, a parità di  $\ell_z$  e  $L$ , al variare della distanza  $d$ .

Il periodo del modo 1 dipende da  $\ell_z$ . Invece, il periodo del modo 2 è influenzato sia da  $\ell_z$  che dalla distanza  $d$ . Nella soluzione del Q.1.2 si è stabilito che  $c_2$  aumenta linearmente con  $d$ .

Queste considerazioni lasciano prevedere che per una data distanza  $d$  il sistema di pendoli debba risultare disaccoppiato. Ciò potrà avvenire se  $\omega_2^2 - \omega_1^2 = 0$  ossia quando  $T_2^2 = T_1^2$ , ossia quando  $c_1 = c_2$ . Poiché è  $c_1 = 0.973$  e  $c_2 = 1.242d + 0.008$ , segue

$$d = \frac{0.973 - 0.008}{1.242} = 0.777 \text{ m}.$$

Questo risultato – sia pure affetto da errori di misura – conferma quanto visto in precedenza, che il disaccoppiamento (teoricamente  $c_2 = c_1 = 1$ ) si ha per  $d = D$ . In tal caso infatti la tensione del filo che unisce i pendoli, che per  $d < D$  era teso e orizzontale, ora diviene nulla. Ovviamente, questa considerazione vale indipendentemente dal valore di  $\ell_z$  impostato.

## PARTE SECONDA – SOVRAPPOSIZIONE DEI MODI NORMALI – BATTIMENTI

### Quesito n. 2.1.

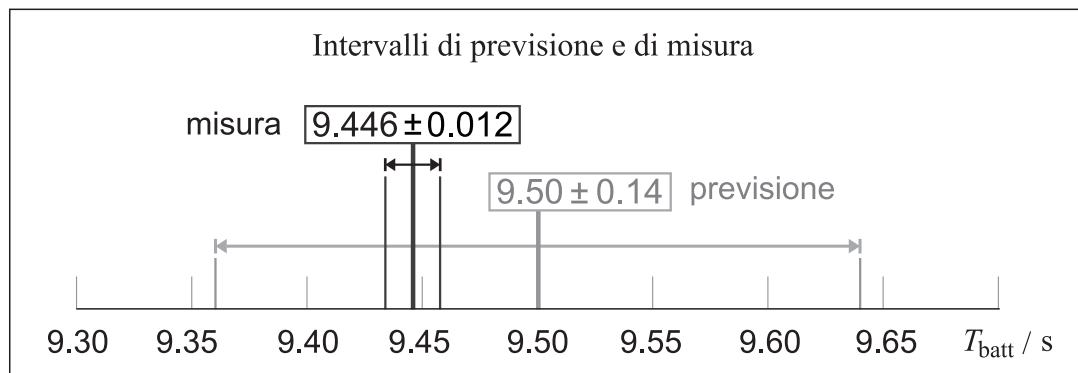
Per effettuare la previsione del periodo dei battimenti conviene ricordare che

$$T_{\text{batt}} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}.$$

$$\text{L'errore relativo sulla previsione è allora dato da } \Delta T_{\text{batt}} = \frac{\sqrt{T_2^4 \Delta T_1^2 + T_1^4 \Delta T_2^2}}{|T_1 - T_2|^2}.$$

Ai fini dell'esecuzione materiale delle misure è interessante notare che l'ampiezza delle oscillazioni del pendolo A, che viene fatto partire spostato di  $y_0$  dalla sua posizione di equilibrio, assume un valore nullo dopo un intervallo di tempo  $\Delta t = T_{\text{batt}}/2$  dalla partenza. A seconda di come si decide di procedere per ottenere la misura del periodo dei battimenti questa considerazione è utile conoscerla.

Esempio	Misure	Elaborazione delle misure
$L = 40.0 \text{ cm}$	$30 T_1 = 46.32 \text{ s}; 46.45 \text{ s}; 46.36 \text{ s}$	$T_1 = (1.5459 \pm 0.0022) \text{ s}$
$D = 75.0 \text{ cm}$	$30 T_2 = 39.92 \text{ s}; 39.93 \text{ s}; 39.80 \text{ s}$	$T_2 = (1.3294 \pm 0.0022) \text{ s}$
$\ell_z = 20.0 \text{ cm}$	$5 T_{\text{batt}} = 47.31 \text{ s}; 47.19 \text{ s}; 47.19 \text{ s}; 47.23 \text{ s}$	$T_{\text{batt}}(\text{previsto}) = (9.50 \pm 0.14) \text{ s}$
$d = 15.0 \text{ cm}$		$T_{\text{batt}}(\text{misurato}) = (9.446 \pm 0.012) \text{ s}$



Tra previsione e misura c'è compatibilità. Va tuttavia notato che l'incertezza sulla previsione è un ordine di grandezza più grande di quella da associare alla misura.

## PARTE TERZA – Pendoli con lunghezze diverse

## Quesito n. 3.1.

Le misure del periodo dei battimenti si fanno considerando il moto del pendolo forzato. Per grandi differenze di lunghezza tra i pendoli le oscillazioni del pendolo forzato hanno un'ampiezza piccola. Ciò nonostante si riesce ad apprezzare abbastanza bene la condizione di quiete del pendolo e ciò rende possibile la misura di  $T_{\text{batt}}$ .

L'errore dell'operatore, nell'avvio e arresto del cronometro, è essenzialmente dovuto alla sua capacità di apprezzare l'istante in cui il pendolo forzato è fermo durante i battimenti.

Per ridurre l'incertezza sulle misure di  $T_{\text{batt}}$  conviene misurare la durata di *almeno*  $N = 4 \div 5$  battimenti, in modo che l'errore dell'operatore sia comunque piccolo rispetto all'intervallo di tempo misurato (che è conveniente risulti, comunque, maggiore di 20 s). Per  $L_f$  decisamente minore di 40.0 cm il numero dei battimenti da utilizzare può aumentare di conseguenza, dato che in tal caso  $T_{\text{batt}}$  risulta piccolo.

L'impiego di un cronometro che registra gli intertempi agevola la misura. Si avvia il cronometro quando il pendolo forzato appare in quiete e si misura l'intervallo necessario per ottenere la condizione di quiete successiva, ecc. In tal modo l'operatore può valutare, mentre esegue le misure, l'entità della differenza tra gli intertempi.

Se questa differenza, per i primi quattro-cinque intertempi è superiore a 3-4 decimi di secondo sarà bene procedere oltre nella misura; in caso contrario si potrà arrestare il cronometro. La tecnica può risultare utile quando, per completare le misure, si ha poco tempo a disposizione.

*A mano a mano che ci si avvicina alla condizione di risonanza conviene ridurre il passo con cui si incrementa la lunghezza del pendolo forzato per avere un maggior dettaglio nella costruzione della curva sperimentale prevista in Q.3.3.*

Esempio di misure e risultati

$$\ell_z = 5.0 \text{ cm}$$

$$d = 10.0 \text{ cm}$$

$$L_p = 40.0 \text{ cm}$$

$$\omega_p = 4.95 \text{ rad s}^{-1}$$

$$D = 75.0 \text{ cm}$$

$L_f/\text{cm}$	$\Delta t/\text{s}$	$N$	$\omega_f/\text{rads}^{-1}$	$T_{\text{batt}}/\text{s}$
55.7	42.64	5	4.20	8.53
53.8	49.79	5	4.27	9.96
52.0	54.52	5	4.34	10.90
50.0	61.89	5	4.43	12.38
48.4	70.93	5	4.50	14.19
47.3	76.07	5	4.55	15.21
46.0	84.98	5	4.62	17.00
44.7	94.92	5	4.68	18.98
43.6	107.10	5	4.74	21.42
42.5	117.24	5	4.80	23.45
41.2	123.75	5	4.88	24.75
40.0	123.82	5	4.95	24.76
38.8	114.78	5	5.03	22.96
38.0	106.60	5	5.08	21.32
36.7	89.53	5	5.17	17.91
35.0	72.21	5	5.29	14.44
33.3	58.61	5	5.43	11.72
31.4	47.14	5	5.59	9.43
29.4	38.35	5	5.78	7.67
27.4	30.93	5	5.98	6.19
25.6	26.64	5	6.19	5.33
24.0	22.94	5	6.39	4.59

## Quesito n. 3.2.

Dopo aver elevato al quadrato e diviso, a secondo membro, numeratore e denominatore per  $\gamma^2 \omega_p^2$ , si ottiene

$$\frac{1}{R^2} - 1 = \frac{(\omega_f^2 - \omega_p^2)^2}{\gamma^2 \omega_p^2}$$

Segue

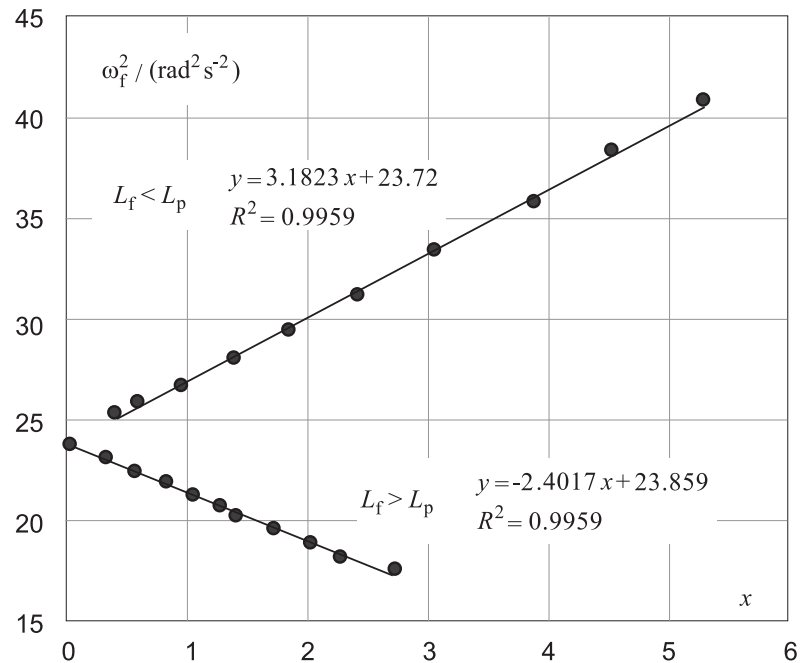
$$\omega_f^2 = \omega_p^2 \pm \gamma \omega_p \sqrt{\frac{1}{R^2} - 1} \Rightarrow \begin{cases} \text{per } \omega_f > \omega_p \rightarrow \omega_f^2 = \omega_p^2 + \gamma \omega_p \sqrt{\frac{1}{R^2} - 1} \\ \text{per } \omega_f < \omega_p \rightarrow \omega_f^2 = \omega_p^2 - \gamma \omega_p \sqrt{\frac{1}{R^2} - 1} \end{cases}$$

Posto

$$x = \sqrt{\frac{1}{R^2} - 1} = \sqrt{\frac{T_{\text{batt},0}^2}{T_{\text{batt}}^2} - 1}$$

si passa alla costruzione del grafico richiesta.

$x$	$\omega_f^2 / (\text{rad}^2 \text{s}^{-2})$
2.726	17.61
2.277	18.23
2.039	18.87
1.733	19.62
1.431	20.27
1.284	20.74
1.060	21.33
0.838	21.95
0.580	22.50
0.340	23.08
0.034	23.81
0.000	24.53
0.405	25.28
0.591	25.82
0.955	26.73
1.393	28.03
1.861	29.46
2.429	31.24
3.070	33.37
3.876	35.80
4.539	38.32
5.304	40.88



I punti sperimentali individuano due andamenti rettilinei distinti. Tali allineamenti sono in accordo con l'ipotesi  $T_{\text{batt}} \propto A$  e confermano il modello proposto. Dal grafico, per  $x = 0$ , si deducono due valori di  $\omega_f^2$  molto prossimi tra loro il cui valore medio vale  $23.79 \text{ rad}^2 \text{s}^{-2}$ . Tale valore è la stima dell'effettiva pulsazione di risonanza ( $x = 0$ : pendoli accordati sulla stessa lunghezza), ossia  $\omega_r = 4.88 \text{ rad s}^{-1}$ , ed è comunque molto prossima a quella naturale dell'oscillatore pilota:  $\omega_p = 4.95 \text{ rad s}^{-1}$ . Dalla pendenza delle rette si deduce invece che i valori dei due coefficienti angolari differiscono di oltre il 25 % tra loro!<sup>(3)</sup> Questo significa che i coefficienti  $\gamma$  che caratterizzano le condizioni  $\omega_f < \omega_p$  e  $\omega_f > \omega_p$  sono diversi!

$$\text{Per } \omega_f^2 < \omega_p^2 \text{ si ha: } |\gamma_-| = \frac{2.40 \text{ rad}^2 \text{s}^{-2}}{4.94 \text{ rad s}^{-1}} = 0.486 \text{ rad s}^{-1}.$$

$$\text{Per } \omega_f^2 > \omega_p^2 \text{ si ha: } |\gamma_+| = \frac{3.18 \text{ rad}^2 \text{s}^{-2}}{4.94 \text{ rad s}^{-1}} = 0.644 \text{ rad s}^{-1}.$$

### Quesito n. 3.3.

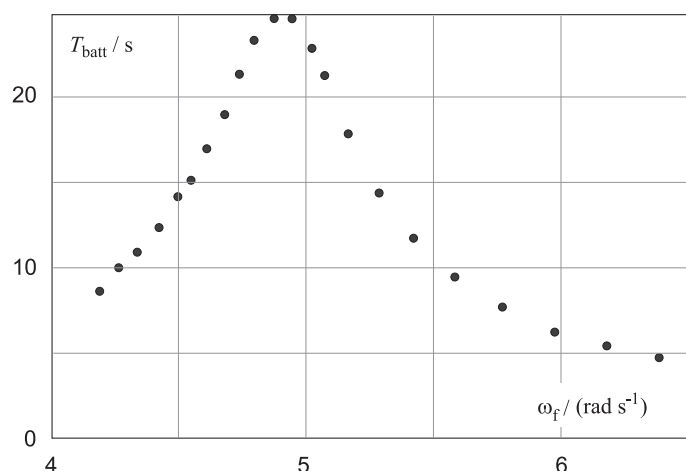
La curva ottenuta è obiettivamente simile a quella dell'oscillatore forzato. Il picco della curva si ha per  $\omega_f$  leggermente minore di  $\omega_p$ . La curva, inoltre, è asimmetrica rispetto al picco.

Per rispondere alla seconda parte della domanda occorre modificare l'equazione

$$T_{\text{batt}} = \frac{\gamma \omega_p}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_p^2)^2 + \gamma^2 \omega_p^2}} T_{\text{batt},0}$$

che, per  $\omega_f \ll \omega_p$ , diventa

$$T_{\text{batt}} \approx \frac{\gamma_-}{\sqrt{\omega_p^2 + \gamma_-^2}} T_{\text{batt},0}$$



Impiegando i valori misurati precedentemente per  $T_{\text{batt},0}$ ,  $\gamma_-$  e  $\omega_p$  si ottiene  $T_{\text{batt}} \approx 2.418 \text{ s}$ .

(3) Nell'equazione dell'ampiezza massima delle oscillazioni forzate, il parametro " $\gamma$ " rappresenta gli effetti dissipativi. In questa sede, esso va interpretato come un coefficiente che ingloba sia l'attrito (di per sé debole), sia le approssimazioni introdotte modellizzando il pendolo accoppiato come un oscillatore forzato ideale.

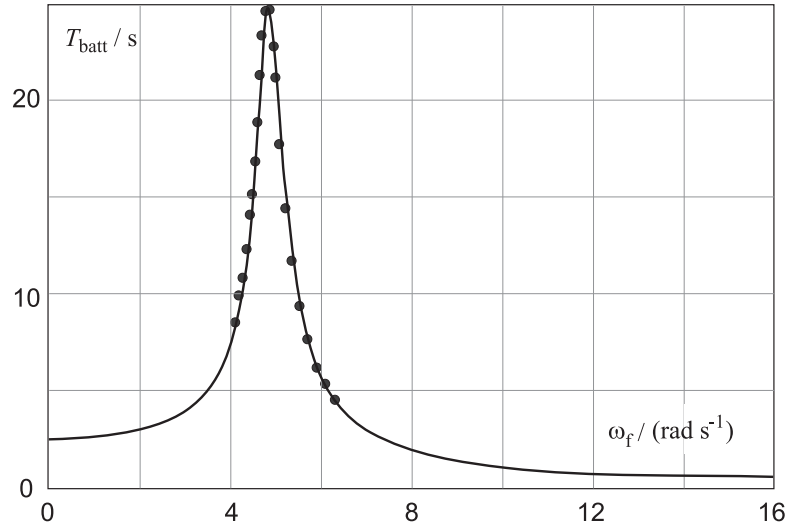
NOTA – È interessante notare quel che ci si deve aspettare anche per  $\omega_f \gg \omega_p$ . In tal caso si ottiene

$$T_{\text{batt}} \approx \frac{\gamma_+ \omega_p}{\omega_f^2 \sqrt{1 + \frac{\gamma_+^2 \omega_p^2}{\omega_f^4}}} T_{\text{batt},0} \approx \frac{\gamma_+ \omega_p}{\omega_f^2} T_{\text{batt},0},$$

ossia  $T_{\text{batt}}$  diminuisce con l'inverso del quadrato della pulsazione del pendolo forzato.

Tali andamenti sono difficili da osservare poiché l'energia che il pendolo pilota riesce a trasmettere al pendolo forzato è piccola al punto che i battimenti non sono apprezzabili a occhio.

Il grafico a fianco riporta l'andamento della funzione  $T_{\text{batt}} = f(\omega_f, \gamma)$  ottenuta con i parametri  $T_{\text{batt},0}$ ,  $\omega_p$ ,  $\gamma_+$  e  $\gamma_-$  che caratterizzano l'esperimento e la distribuzione dei punti sperimentali.



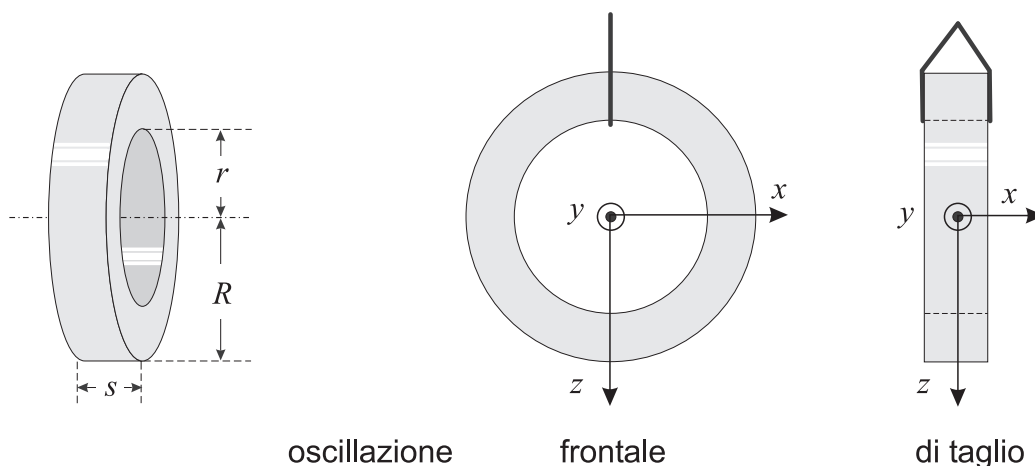
## APPENDICE 1 – CAUSE CHE DETERMINANO IL VALORE $c_1 < 1$

### Oscillazioni di un filo al cui estremo è appeso un disco spesso e forato

Sono dati: il raggio esterno del disco  $R$ ; il raggio interno del foro  $r$ ; lo spessore del disco  $s$ .

Il disco è appeso a un filo. La distanza tra il centro di massa del disco e il punto di sospensione del filo sia  $\ell$ .

Il disco è riferito alla solita terna cartesiana (vedi la figura a destra) centrata nel centro di massa del disco stesso e le oscillazioni che hanno luogo come prima lungo l'asse  $y$ , perpendicolarmente al piano della figura, a seconda della disposizione del disco, possono essere di tipo *frontale* come nella figura al centro, o *di taglio* come nella figura a destra.



oscillazione

frontale

di taglio

Per le prime è necessario sapere che il momento d'inerzia del disco calcolato rispetto all'asse  $x$  vale

$$I_{\text{fr}} = \frac{1}{12} M[3(R^2 + r^2) + s^2].$$

mentre per le oscillazioni di taglio il momento d'inerzia del disco, calcolato sempre rispetto all'asse  $x$ , vale

$$I_{\text{tg}} = \frac{1}{2} M(R^2 + r^2)$$

Il periodo delle piccole oscillazioni è dato dalla relazione  $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mg\ell}}$  in cui

$I$  vale  $I_{\text{fr}} + M\ell^2$  per le oscillazioni *frontali* e  $I_{\text{tg}} + M\ell^2$  per quelle *di taglio*. Segue

$$\text{oscillazioni frontali:} \quad T_{\text{fr}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g} + \frac{3(R^2 + r^2) + s^2}{12\ell g}}$$

$$\text{oscillazioni di taglio:} \quad T_{\text{tg}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g} + \frac{R^2 + r^2}{2\ell g}}$$

Approssimando il dado da bullone a un disco spesso e forato e posto:  $\ell = 0.500$  m;  $R = 0.020$  m;  $r = 0.010$  m;  $s = 0.010$  m, si ha  $T_{\text{fr}} = 1.4189$  s;  $T_{\text{tg}} = 1.4192$  s.

La differenza tra i due periodi è di soli 0.3 ms. Il confronto va però fatto con il periodo delle oscillazioni di pendolo matematico:  $T = 2\pi \sqrt{\ell/g} = 1.4185$  s. La differenza massima si ha per le oscillazioni *di taglio* e vale 0.7 ms (differenza percentuale uguale a 0.5 per mille), mentre per quelle *frontali* si riduce a soli 0.3 ms.

Per  $\ell = 0.800$  m il periodo delle oscillazioni *di taglio* vale 1.7945 s, mentre quello delle oscillazioni di pendolo matematico vale 1.7943 s con una differenza di 0.2 ms pari allo 0.1 per mille del periodo di pendolo matematico.

### Correzione quadratica per l'ampiezza delle oscillazioni

In generale è

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mg\ell}} \left( 1 + \frac{\theta_{\text{max}}^2}{16} \right)$$

Ammettendo che  $\ell = 0.500$  m e che il pendolo venga spostato dalla posizione di equilibrio di  $z = 0.10$  m, è  $\theta_{\text{max}} \approx z/\ell = 0.2$ , segue

$$T_{\text{tg}} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g} + \frac{R^2 + r^2}{2\ell g}} \left( 1 + \frac{\theta_{\text{max}}^2}{16} \right) = 1.4228 \text{ s}$$

È questa la situazione peggiore che produce una maggiorazione di poco più di 4 ms rispetto al periodo del pendolo matematico.

Se, invece, l'ampiezza iniziale viene dimezzata si ottiene  $T_{\text{tg}} = 1.4201$  s, con una maggiorazione di soli 1.6 ms.

Per  $\ell = 0.800$  m e  $z = 0.05$  m si ha  $T_{\text{tg}} = 1.7956$  s con una differenza di circa 1.3 ms rispetto al pendolo matematico.

### Effetti prodotti dalla massa dei fili

L'ampiezza delle oscillazioni e il momento d'inerzia dei dadi da bullone tendono a produrre un aumento del periodo delle oscillazioni. Come visto, tale aumento è peraltro piccolo dell'ordine di pochi millisecondi. Tuttavia, le misure producono sistematicamente un valore di  $c_1 < 1$  e ciò è compatibile con un periodo minore del periodo del pendolo matematico per tutte le lunghezze esplorabili con l'apparato.

Un periodo più piccolo può essere spiegato dall'influenza della massa dei fili in oscillazione.

Senza pretendere il rigore, si può assimilare il sistema oscillante a una barra sottile di massa  $m$  uguale a quella dei fili con appesa una massa  $M$  uguale alla massa totale dei due dadi. Per tale sistema vale la relazione

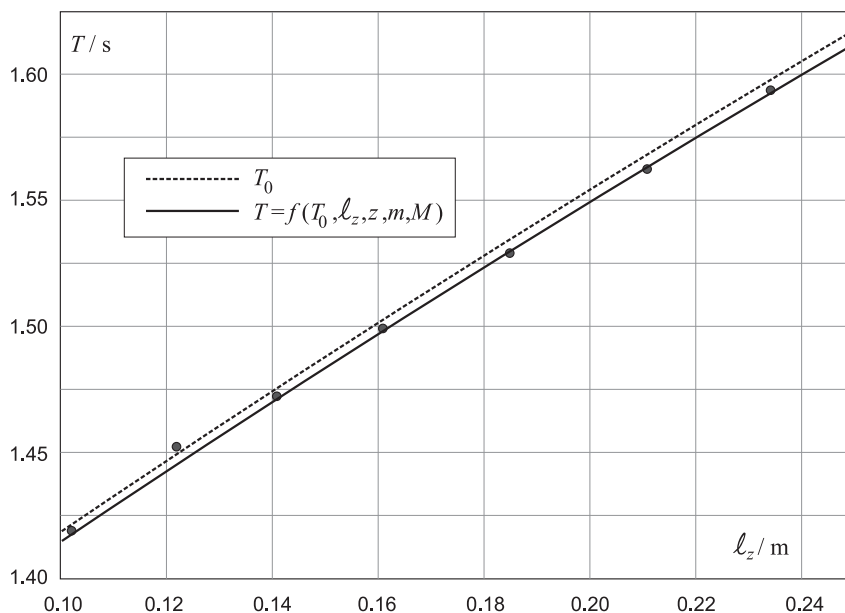
$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{6M + 2m}{6M + 3m}}$$

in cui  $T_0$  è il periodo delle oscillazioni di un pendolo semplice di lunghezza  $\ell = L + \ell_z$ . Si può pertanto riscrivere tale relazione sostituendo a  $T_0$  il valore del periodo  $T_{\text{tg}}$  comprensivo degli effetti del momento d'inerzia dei dadi e dell'ampiezza dell'oscillazione, definito sopra.

$$T = \left[ 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g} + \frac{R^2 + r^2}{2\ell g}} \left( 1 + \frac{\theta_{\text{max}}^2}{16} \right) \right] \sqrt{\frac{6M + 2m}{6M + 3m}}$$

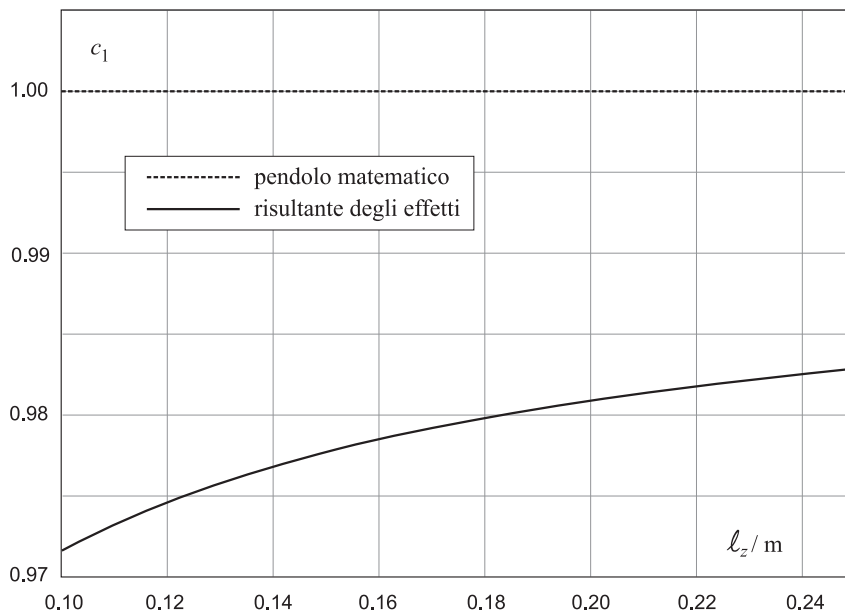
Le misure di  $m$  relativa alla porzione di fili in oscillazione (comprensiva delle lamine di fermaglio) e  $M$  hanno fornito i seguenti valori  $m = 1.5$  g e  $M = 30.8$  g. Si nota intanto che la massa dei fili rappresenta il 4.9 % della massa del sistema oscillante!

Nell'ipotesi di piccole oscillazioni (allontanamento dalla posizione di equilibrio  $z < 5$  cm) si ottengono periodi compatibili con quelli misurati, come si evince dal grafico a fianco.



I valori di  $c_1$  prevedibili considerando tutti gli effetti menzionati sono riprodotti nel grafico a fianco.

Nel range di lunghezze  $l_z$  esplorabili la variazione di  $c_1$  è dell'ordine dell'uno per cento.



## Bibliografia

- [1] Leonard O. Olsen, Coupled Pendulums: An Advanced Laboratory Experiment, Am. J. Phys. **13**, 321 (1945).
- [2] Michael J. Moloney: String-coupled pendulum oscillators: Theory and experiment, Am. J. Phys. **46**, 1246 (1978)
- [3] C. Kittel; W. Knight; M. Ruderman: Meccanica, La Fisica di Berkeley, Ed. Zanichelli, **vol. 1**, (1970)
- [4] Frank S. Crawford, Jr.: Onde e Oscillazioni, La Fisica di Berkeley, Ed. Zanichelli, **vol. 3** (1972).



Materiale elaborato dal Gruppo  
**PROGETTO OLIFIS**  
 Segreteria dei Campionati Italiani di Fisica  
 E-mail: [segreteria@olifis.it](mailto:segreteria@olifis.it) - WEB: [www.olifis.it](http://www.olifis.it)



## NOTA BENE

È possibile utilizzare, riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico questo materiale alle due seguenti condizioni: citare la fonte; non usare il materiale, nemmeno parzialmente, per fini commerciali.